О порождаемости тремя инволюциями группы $SL_6(\mathbb{Z})$

Тимофеенко И. А.
ivan.timofeenko@gmail.com

Пусть $GL_n(\mathbb{Z})$ — группа обратимых $(n \times n)$-матриц над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, $SL_n(\mathbb{Z})$ — ее подгруппа матриц с определителем равным 1, $PGL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ — соответственно их фактор-группы по подгруппам скалярных матриц.

Группу G будем называть $(2,2,2)$-*порожденной* ($(2{\times}2,2)$-*порожденной*), если она порождается тремя инволюциями (соответственно тремя инволюциями, две из которых перестановочны).

Для групп SL_n, PSL_n, GL_n, PGL_n над кольцом целых чисел ответы на вопросы об их $(2,2,2)$ и $(2 \times 2,2)$-порождаемости, а также на вопрос о минимальном числе порождающих инволюций, произведение которых равно 1 $i(G)$, известен, исключая лишь группы SL_6 и SL_{10}. Результаты собраны в таблицу.

G	$(2,2,2)$	$(2\times 2,2)$	$i(G)$
SL_2	$-$	$-$	$-$
PSL_2	$-$	$-$	$-$
GL_2	$+$	$-$	6
PGL_2	$+$	$+$	5
$SL_n, PSL_n, GL_n, PGL_n, n=3,4$	$+$	$-$	6
$SL_n, n\geq 5, n\neq 6,10$	$+$	$+$	5
SL_6	?	$-$	?
SL_{10}	?	?	?
$PSL_n, GL_n, PGL_n, n\geq 5$	$+$	$+$	5

Теорема. *Группа $SL_6(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ порождается тремя следующими инволюциями:*

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$